Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I

HOJA DE PROBLEMAS: APLICACIONES LINEALES

1. Para las siguientes aplicaciones lineales $f: U \to V$ calcular tanto el núcleo como la imagen y decir las propiedades de la aplicación (ver si es inyectiva y suprayectiva).

   a) $U = V = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (z, x + y, -z)$.
   b) $U = V = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, x + 2z)$.
   c) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^4$ $\quad f(x, y, z) = (z, x + y, -z, y - x)$.
   d) $U = \mathbb{R}^4, V = \mathbb{R}^2$ $\quad f(x, y, z, t) = (x - 3y + 8t, 2x)$.
   e) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2$ $\quad f(x, y, z) = (x + y + z, 0)$.
   f) $U = V = \mathbb{R}^3$ $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_3)$.

2. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base

$$B' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

3. Se considera la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

que cumple que

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= (2, 3 - 1) \\ f(0, 1) &= (0, -2, 3) \end{aligned}$$

Dadas bases respectivas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(-1, 2), (3, 0)\}, B' = \{(0, 0, -1), (0, 2, 1), (-1, 1, 4)\}$$

se pide obtener las matrices asociadas siguientes

$$M_{C_2 \to C_3}(f), M_{B \to C_3}(f), M_{C_2 \to B'}(f)$$

siendo C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

4. Supongamos que tenemos una aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

y que consideramos en el primer espacio vectorial la base canónica C y en el segundo una base B. Supongamos que

$$M_{C \to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector $v = (2, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ hallar $f(v)_B$. Hallar los posibles $w \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(w)_B = (2, 4)$.

5. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ la base

$$B = \{e_1 = (-2, 1, 1), e_2 = (1, -1, 0), e_3 = (3, 2, -4)\}$$

y el endomorfismo f tal que

$$M_{B \to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b - 1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $f(e_2 + e_3) = e_1 + e_2$.

   a) Justifica que $a = 2, b = 3$ y $c = -2$.
   b) Calcula la matriz de f respecto de la base canónica y su expresión analítica.
   c) Calcula Ker f e Im f. ¿Es f inyectiva?¿Es f suprayectiva?

6. Determinar la matriz asociada en las bases canónicas para cada una de las siguientes aplicaciones lineales:

   a) En $\mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de base $U = < (1, 1, 0), (0, 1, -1) >$.
   b) En $\mathbb{R}^3$ la simetría ortogonal de base $W = < (1, 1, 0), (0, 1, -1) >$.

7. **Aplicaciones Lineales (Matrices) para la derivada y la integral** [1]. Consideremos los espacios vectoriales $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que 3 y 2, respectivamente. En el primero de ellos tomamos la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ y en el segundo la base $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$. Se pide:

   a) **Matriz de la derivada.** Consideremos la aplicación lineal que asocia a cada polinomio su derivada, es decir,

$$\begin{array}{rccl} D: & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \\ & p(x) & \mapsto & D(p)(x) := p'(x). \end{array}$$

   Comprueba que la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es

$$M_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   b) **Matriz de la integral.** Consideremos ahora la aplicación lineal que asocia a cada polinomio su integral, es decir,

$$\begin{array}{rccl} I: & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ & p(x) & \mapsto & I(p)(x) := \int_0^x p(t)\, dt. \end{array}$$

   Comprueba que la matriz asociada a I en las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}$ es

$$M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   c) Calcula Ker D y Ker I.
   d) Comprueba que $M_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}(D) \cdot M_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}(I) = I_3$, con I_3 la matriz identidad 3×3. Nótese que esta identidad matricial es una epecie de versión matricial del Teorema Fundamental del Cálculo: Derivada de la integral de una función $f(x) = f(x)$, es decir, derivación e integración son operaciones inversas.

8. **Aplicaciones Lineales (Matrices) para los gráficos por ordenador** [1]. Los gráficos por ordenador tratan con imágenes. Estas imágenes se mueven (transladan), cambian de escala, se giran y se proyectan (imágenes 3D sobre planos e imágenes 2D sobre rectas). Estas tres últimas transformaciones en el espacio tridimenasional se representan matemáticamente por medio de las siguientes aplicaciones lineales:

   - Cambio de escala (Scaling o Rescaling en inglés):

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto & S(\vec{v}) := (c_1 v_1, c_2 v_2, c_3 v_3), \end{array}$$

   con $c_j > 0$, $1 \leq j \leq 3$. Calcula la matriz asociada a S en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

- Rotación: una rotación de ángulo θ en el plano se puede realizar por medio de la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

¿Cómo es la matriz que permite rotar vectores en el plano YZ ?

- Proyección: en los cursos de Álgebra Lineal casi todos los planos pasan por el origen. En la vida real, casi ninguno. Dado un vector unitario $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ y otro vector fijo $\vec{v}_0 = (v_1^0, v_2^0, v_3^0)$, la proyección de cualquier vector tridimensional $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano de ecuación $n_1x + n_2y + n_3z = v_1n1 + v_2n_2 + v_3n_3$ se calcula multiplicando el vector de coordenadas $(v_1, v_2, v_3, 1)$ por la matriz 4×4 (llamada de proyección)

$$P = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ -\vec{v}_0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 - \vec{n}\cdot\vec{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ \vec{v}_0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprueba que la proyección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sobre el plano XY se puede calcular mediante el procedimiento anterior.

Aunque en principio, una translación es más fácil, sin embargo las translaciones no son aplicaciones lineales. En efecto, comprueba que si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector fijo, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}} : \quad & \mathbb{R}^3 & \to \quad & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) & \mapsto \quad & T_{\vec{a}}(\vec{v}) := (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3), \end{aligned}$$

no es lineal. Por ello, una tranlación en el espacio tridimensional no se puede representar por medio de una matriz 3×3. Esta dificultad se soluciona aumentando en uno el tamaño de la matriz de modo que la tranlación de vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se calcula por medio de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

es decir, comprueba que

$$T_{\vec{a}}(\vec{v}) = \vec{a} + \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las 4 coordenadas $(v_1, v_2, v_3, 1)$ del vector tridimensional $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se llaman coordenadas homogéneas de $\vec{v}$.

Referencias

[1] G. Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley - Cambridge Press, 2009.

Hoja de Problemas. Aplicaciones Lineales.

① f) $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2-x_3,\ x_3)$$

$$\ker f = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 :\ f(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0)\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0\\ x_1+x_2-x_3 &= 0\\ x_3 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &x_1+x_2=0\\ &x_2=\alpha \rightarrow x_1=-\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\ker f = \langle(-1,1,0)\rangle$$

$$\underset{3}{\dim\mathbb{R}^3} = \underset{1}{\dim\ker f} + \underset{2}{\dim\operatorname{Im} f}$$

$$\operatorname{Im} f = \langle f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1)\rangle$$

$$= \langle (1,1,0),\ (1,1,0),\ (1,-1,1)\rangle$$

$$= \langle (1,1,0),\ (1,-1,1)\rangle.$$

②

$$\begin{array}{ccc} \underset{B'}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{f} & \underset{B'}{\mathbb{R}^3}\\ {\scriptstyle Id}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Id}\\ \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{f} & \underset{C_3}{\mathbb{R}^3}\end{array}$$

$$M_{B'\to B'}(f) = M_{C_3\to B'}(Id)\, M_{C_3\to C_3}(f)\, M_{B'\to C_3}(Id)$$

$$M_{C_3\to C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$M_{B'\to C_3}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$M_{C_3 \to B'}(Id) = \left[M_{B' \to C_3}(Id) \right]^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to (-1)F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$M_{C_3 \to B'}(Id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{B' \to B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

④ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad C = \{ \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{i}}, \underbrace{(0,1,0)}_{\vec{j}}, \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{k}} \}$

$B = \{ ? \}$

$$M_{C \to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$v = (2, -1, 2)$, $\quad f(v)_B = ?$

$v = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$f(v)_B = 2 f(\vec{i})_B - f(\vec{j})_B + 2 f(\vec{k})_B = 2 \cdot (1, -2) - (-1, 0) + 2 \cdot (0, 2)$

$= (3, 0)$

$w_C = (x, y, z)$

$$f(w)_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ -2x + 2z = 4 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad r(A) = 2 = r(A|b) < 3 = \text{nº incógnitas}$$

1 parámetro.

$z = \alpha \rightarrow 2x = 2\alpha - 4 \rightarrow x = \alpha - 2$

$y = x - 2 = \alpha - 2 - 2 = \alpha - 4$

w_C ~~$f(w)_B$~~ $= (\alpha - 2, \alpha - 4, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

5 $B = \{ e_1 = (-2,1,1), \ e_2 = (1,-1,0), \ e_3 = (3,2,-4) \}$

$$M_{B\to B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b-1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

$f(e_2 + e_3) = e_1 + e_2$

a) $a = 2, \ b = 3, \ c = -2.$

$$f(e_2 + e_3) = e_1 + e_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & b-1 \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(e_2+e_3)_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(e_1+e_2)_B}$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 + a = 1 \\ -1 + b - 1 = 1 \\ 2 + c = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -2. \end{array}$$

b)

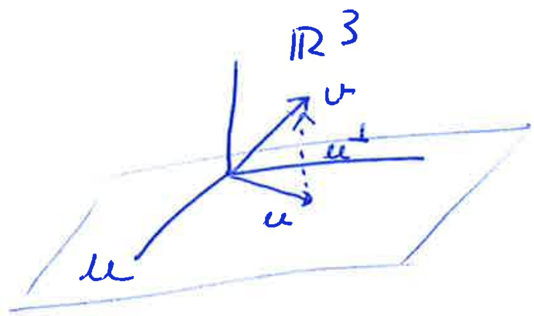
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id"'] & \mathbb{R}^3_{C} \\ \mathbb{R}^3_{B} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3_{B} \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

$$M_{C\to C}(f) = M_{B\to C}(Id)\, M_{B\to B}(f) \quad M_{C\to B}(Id)$$

$$M_{B\to C}(Id) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$M_{C\to B}(Id) = \left(M_{B\to C}(Id) \right)^{-1} = \dots$$

c) - -



⑥ $P_{U}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^3$

$v \longmapsto P_U v = \mathbb{P}_{v\to U}$

Empezamos calculando una base ortonormal de U.

Método de Gram-Schmith.

1º) $w_1 = u_1 = (1,1,0)$

2º) $w_2 = u_2 + a_{12} u_1$

$$0 = w_1 \cdot w_2 = w_1 \cdot u_2 + a_{12}\, w_1 \cdot w_1 \Rightarrow a_{12} = -\frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1}$$

$$= -\frac{(1,1,0)\cdot(0,1,-1)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$w_2 = (0,1,-1) - \tfrac{1}{2}(1,1,0)$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -1\right)$$

$$\|w_1\| = \sqrt{w_1 \cdot w_1} = \sqrt{2}$$

$$\|w_2\| = \sqrt{w_2 \cdot w_2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Base ortonormal de $\mathcal{U}$

$$B_{\mathcal{U}} = \{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}_{w_1'}, \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)}_{w_2'} \}$$

La matriz buscada tiene por columnas $\mathbb{P}_{\vec{i} \to \mathcal{U}}$, $\mathbb{P}_{\vec{j} \to \mathcal{U}}$, $\mathbb{P}_{\vec{k} \to \mathcal{U}}$

siendo $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

~~(1,~~

· $\mathbb{P}_{\vec{i} \to \mathcal{U}}$:

$$\vec{i} = \alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2' + v^{\perp}, \qquad v^{\perp} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

Multiplicando escalarmente por w_1':

$$w_1' \cdot \vec{i} = \alpha_1 w_1' \cdot w_1' + \alpha_2 \overset{0}{\cancel{w_2' \cdot w_1'}} + \overset{0}{\cancel{w_1' \cdot v^{\perp}}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = w_1' \cdot \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\cdot(1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando ahora por w_2':

$$w_2' \cdot \vec{i} = \alpha_1 \overset{0}{\cancel{w_2' \cdot w_1'}} + \alpha_2 w_2' \cdot w_2' + \overset{0}{\cancel{w_2' \cdot v^{\perp}}}$$

$$\alpha_2 = w_2' \, \vec{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)\cdot(1,0,0) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Por tanto:

$$\mathbb{P}_{\vec{i} \to \mathcal{U}} = \frac{1}{\sqrt{2}} w_1' - \frac{\sqrt{3}}{4} w_2'$$

igual para las otras dos columnas.

$$M_{C \to B_{\mathcal{U}}}(\mathbb{P}_{\mathcal{U}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & ; \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & ; \end{pmatrix}$$

Si quisiéramos expresar todo en la base canónica, entonces

$$\mathbb{P}_{\vec{i}\to\mathcal{U}} = \frac{1}{\sqrt{2}} w_1' - \frac{\sqrt{3}}{4} w_2'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1,1,0) - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{9}{16}, -\frac{9}{16}, \frac{9}{8}\right)}$$

$$M_{C\to C}(\mathbb{P}_{\mathcal{U}}) = \left(\begin{array}{c|} 1^{\text{a}} \text{ columna} \end{array} \right.$$

La 2ª columna se obtiene calculando $\mathbb{P}_{\vec{j}\to\mathcal{U}}$ y la 3ª columna con $\mathbb{P}_{\vec{k}\to\mathcal{U}}$.

⑦ Matrices para la derivada e integral.

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}.$$

$$\mathcal{B} = \{ \cancel{\{} 1, x, x^2, x^3 \cancel{\}} \}, \quad \mathcal{B}' = \{ 1, x, x^2 \}$$

a) $$D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$
$$p(x) \longmapsto D(p)(x) = p'(x).$$

$$M_{B\to B'}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$D(x) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$D(x^2) = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2$$

b) $I(1) = \int 1\,dx = x = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

$I(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} = 0\cdot 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3$

$I(x^2) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3$

$$M_{B'\to B}(I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) $\ker I = \{ \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}_{p(x)} \in P_2(\mathbb{R}) : I(p)(x) = 0 \}$

$(p(x))_B = (a_0, a_1, a_2)$

$$(Ip)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ \tfrac{1}{2} a_1 &= 0 \\ \tfrac{1}{3} a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = 0 \quad \ker I = \{0\}.$$